NOTATIONS et DÉFINITIONS.

Soit d un entier positif.

On désigne par Λ le sous-groupe additif $(2\pi\mathbf{Z})^d$ de $\mathbf{R}^d$. Une application f définie sur $\mathbf{R}^d$ est dite Λ-périodique si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on a $f(x+\lambda) = f(x)$.

Si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $C^\infty(\mathbf{R}^d, E)$ l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbf{R}^d$ dans E, et $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, E)$ le sous-espace de $C^\infty(\mathbf{R}^d, E)$ constitué des applications Λ-périodiques.

L'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels à d lignes et d colonnes est noté $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, et I désigne la matrice identité. Si $A \in C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ et i, j sont deux entiers compris entre 1 et d, A_{ij} désigne l'élément de $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ défini par le coefficient de A en ligne i et en colonne j.

Si N est un entier positif, on note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^N$. Etant donné deux applications V, W de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^N$, on note $\langle V, W\rangle$ la fonction sur $\mathbf{R}^d$ définie par

$$\langle V, W\rangle(x) = \langle V(x), W(x)\rangle.$$

Si $P \in C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$, on note $\Gamma(P)$ l'élément de $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ défini par

$$\Gamma(P)_{ij} = \langle \frac{\partial P}{\partial x_i}, \frac{\partial P}{\partial x_j} \rangle,\ 1 \leq i, j \leq d.$$

Une *métrique de dimension d* est une application $G \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $G(x)$ soit une matrice symétrique définie positive. On dit que G est *représentable en dimension N* s'il existe une application $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ telle que $G = \Gamma(P)$.
Le but de ce problème est de démontrer que toute métrique de dimension d est représentable en dimension assez grande (théorème de Nash, 1956).

Les parties **I, II, III, IV** sont indépendantes, à l'exception de la première question de la partie **IV** qui utilise la deuxième question de la partie **III**. La partie **V** utilise les parties **II, III** et **IV**.

PARTIE I. UN FAIT GÉNÉRAL ET DEUX CAS PARTICULIERS.

1. Soit $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$. Montrer que $\Gamma(P)$ est une métrique de dimension d si et seulement si la différentielle de P est injective en tout point de $\mathbf{R}^d$.

En déduire que, si $\Gamma(P)$ est une métrique de dimension d, alors $N > d$ (on pourra raisonner par l'absurde, en étudiant l'annulation de la différentielle de l'une des composantes de P).

2. Soit $g \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une métrique de dimension 1, c'est-à-dire $g(x) > 0$ en tout point x. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ et une fonction $a \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tels que l'application $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$P(x) = \left(M\cos\left(\frac{1}{M}\int_0^x a(y)\,dy\right), M\sin\left(\frac{1}{M}\int_0^x a(y)\,dy\right)\right)$$

soit 2π-périodique et vérifie $\Gamma(P) = g$.

3. Soit G la métrique de dimension 2 définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^2, G(x) = I\,.$$

a) Montrer que G est représentable en dimension 4.

On se propose de démontrer par l'absurde que G n'est pas représentable en dimension 3. Soit $P \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ telle que $\Gamma(P) = G$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, on considère le produit vectoriel

$$N(x) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial P}{\partial x_2}(x).$$

b) Montrer qu'il existe des fonctions b, a_1, a_2 de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = bN,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = a_1 N,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} = a_2 N\,.$$

Exprimer alors $\dfrac{\partial N}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x_2}$ à l'aide de a_1, a_2, b et des dérivées premières de P.

c) En calculant de deux manières $\dfrac{\partial^3 P}{\partial x_1^2 \partial x_2}$, montrer que

$$a_1 a_2 = b^2\,.$$

d) On suppose de plus que P est Λ–périodique.
Montrer que la fonction $x \mapsto \langle P(x), P(x)\rangle$ atteint son maximum en un point y, et qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $P(y) = \lambda N(y)$. Que peut–on dire de la matrice

$$A = \lambda \begin{pmatrix} a_1(y) & b(y) \\ b(y) & a_2(y) \end{pmatrix} ?$$

Conclusion ?

PARTIE II. UNE VARIANTE DU THÉORÈME DU POINT FIXE.

Soit E_0 un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, muni d'une norme N_0 qui le rend complet. Soit

$$\mathcal{B} : E_0 \times E_0 \to E_0$$

une application bilinéaire. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in E_0,\ \forall v \in E_0,\quad N_0(\mathcal{B}(u,v)) \leq C\, N_0(u)\, N_0(v).$$

1. Montrer que, pour tout élément f de E_0 tel que $N_0(f) < \dfrac{1}{4C}$, il existe un élément u et un seul de E_0 tel que $N_0(u) < \dfrac{1}{2C}$ et

$$u = f + \mathcal{B}(u,u).$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on suppose donnés un sous–espace vectoriel E_k de E_0 et une norme N_k sur E_k ayant la propriété suivante :

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E_k et tout élément u de E_0 vérifiant

i) La suite $(N_k(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée,

ii) $N_0(u_n - u)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini,

on a $u \in E_k$.

On suppose en outre que, si $k \geq l \geq 0$, $E_k \subset E_l$ et $N_k \geq N_l$ sur E_k.

Enfin, on fait l'hypothèse qu'il existe une suite $(D_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs telle que, pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{B}(E_k \times E_k) \subset E_k$ et

$$\forall u \in E_k, \quad N_k(\mathcal{B}(u,u)) \leq C\, N_0(u) N_k(u) + D_k (N_{k-1}(u))^2.$$

2. Dans les conditions de la question 1, montrer que, s'il existe $k \geq 1$ tel que $f \in E_k$, alors $u \in E_k$.

PARTIE III. APPROXIMATION.

Dans cette partie, on montre que toute métrique de dimension d peut être approchée par une suite de métriques représentables.

On note $X = [-\pi, \pi]^d$ et $L = \mathbf{Z}^d$. On appelle *polynôme trigonométrique* toute fonction $p : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ telle qu'il existe une famille $(c_l)_{l\in L}$ de nombres complexes, nuls sauf pour un ensemble fini d'indices l, pour laquelle

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad p(x) = \sum_{l\in L} c_l e^{i\langle l, x\rangle}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

Pour tout entier positif m, J_m désigne l'intersection $\mathbf{Z} \cap [-m, m[$. On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : pour toute fonction continue F sur $X \times X$, on a

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^d \sum_{l\in J_m^d} F\left(x, \frac{l\pi}{m}\right) \to \int_X F(x,y)\, dy$$

quand m tend vers l'infini, uniformément par rapport à $x \in X$.

1. Montrer que, pour toute fonction continue Λ-périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$\int_X f(x-y)\, dy = \int_X f(y)\, dy$$

(on pourra raisonner par récurrence sur d).

2. Pour tout réel t et tout entier positif n, on pose

$$q_n(t) = (2 + \cos t)^n, \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)\, dt$$

et on considère la suite p_n de fonctions de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$p_n(x_1, \ldots, x_d) = \frac{1}{I_n^d}\, q_n(x_1) \ldots q_n(x_d).$$

a) Montrer que, pour tout réel $\delta \in]0, \pi[$, on a

$$\frac{1}{I_n} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\, dt \to 1$$

quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que, pour toute fonction continue Λ-périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, la suite (f_n) de fonctions définie par

$$f_n(x) = \int_X p_n(y) f(x-y)\, dy$$

converge uniformément vers f.
En déduire que l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues Λ-périodiques pour la norme de la convergence uniforme.

c) Montrer de plus que, si f est de classe C^r, alors toute dérivée partielle de f_n d'ordre inférieur ou égal à r converge uniformément vers la dérivée partielle correspondante de f quand n tend vers l'infini.

Pour tout élément A de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, on pose

$$|A| = \sup_{1 \le i,j \le d} |A_{ij}|.$$

On fixe un entier positif r et on note, pour toute application $M \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$,

$$\|M\|_r = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \left(|M(x)| + \sum_{\alpha=1}^{d} \left\| \frac{\partial^r M}{\partial x_\alpha^r}(x) \right\| \right)$$

3. Montrer que, pour toute métrique G de dimension d et tout $\varepsilon > 0$, il existe $D \in \mathbf{N}$, des éléments $y_1, \ldots, y_D$ de X, et des éléments $\mu_1, \ldots, \mu_D$ de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ à valeurs strictement positives, tels que

$$\|G - \sum_{j=1}^{D} \mu_j\, G(y_j)\|_r \le \varepsilon.$$

4. Si $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbf{R}^d$, on note $v \otimes v$ l'élément de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ défini par

$$(v \otimes v)_{ij} = v_i v_j \ , \ 1 \le i, j \le d.$$

Montrer que, pour toute matrice A symétrique définie positive et tout $\varepsilon > 0$, il existe des réels strictement positifs $a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}$ et des éléments $l^{(1)}, \ldots, l^{(d)}$ de L tels que

$$|A - \sum_{i=1}^{d} a^{(i)}\, l^{(i)} \otimes l^{(i)}| \le \varepsilon$$

5. Soient $r_1, \ldots, r_q$ des éléments de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ et $l^{(1)}, \ldots, l^{(q)}$ des éléments de L. Pour tout entier positif n, on considère l'application

$$P_n : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^{2q} = (\mathbf{R}^2)^q$$

$$x \mapsto \left(\frac{r_k(x)}{n} \cos(n\langle l^{(k)}, x\rangle), \frac{r_k(x)}{n} \sin(n\langle l^{(k)}, x\rangle) \right)_{1 \le k \le q}$$

Calculer $\Gamma(P_n)$.

6. Soient G une métrique de dimension d et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier positif N et $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ tels que

$$\|G - \Gamma(P)\|_r \le \varepsilon.$$

PARTIE IV. SÉRIES DE FOURIER À PLUSIEURS VARIABLES ET ESPACES DE SOBOLEV.

On rappelle les notations $X = [-\pi, \pi]^d$ et $L = \mathbf{Z}^d$ introduites à la partie III.

Pour tout $l = (l_1, ..., l_d) \in L$, on note $[l] = \sum_{j=1}^{d} |l_j|$.

Pour tout entier positif N, on désigne par L_N l'ensemble des $l \in L$ tels que $[l] \leq N$. Enfin, pour toute fonction continue Λ-périodique $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, on pose

$$\hat{f}(l) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_X e^{-i(l,x)} f(x)\, dx\,, \quad S_N f(x) = \sum_{l \in L_N} \hat{f}(l) e^{i(l,x)},$$

$$|f|_0 = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_X |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

1. a) Que peut-on dire de la suite $(S_N p)_{N \in \mathbf{N}}$ si p est un polynôme trigonométrique ? Exprimer dans ce cas $|p|_0$ en fonction des coefficients $\hat{p}(l)$.

b) Dans le cas général où f est continue, exprimer $|f - S_N f|_0^2$ en fonction de $|f|_0^2$ et de $|S_N f|_0^2$.

c) Montrer que $|f - S_N f|_0$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (on pourra utiliser le résultat de la question III.2.b). Quelle est la limite quand N tend vers l'infini de la quantité

$$\sum_{l \in L_N} |\hat{f}(l)|^2 \quad ?$$

Pour tout réel s tel que $2s > d$, on note H^s l'espace vectoriel des fonctions continues Λ-périodiques $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$, telles que la quantité

$$\sum_{l \in L_N} (1 + [l])^{2s} |\hat{f}(l)|^2$$

admette une limite quand N tend vers l'infini. On note $|f|_s$ la racine carrée de cette limite. On définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel H^s.

2. a) Soit (f_n) une suite de H^s possédant les deux propriétés suivantes :

i) La suite $(|f_n|_s)$ est bornée.

ii) La suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

Montrer que f appartient à H^s et que $|f|_s \leq \limsup_{n \to \infty} |f_n|_s$.

b) Montrer que, pour tout réel $\alpha > d$, pour tout réel $\beta \geq 1$, pour tout entier $N > 0$,

$$\sum_{l \in L_N} \frac{1}{(\beta + [l])^\alpha} \leq \frac{(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha - d + 1)(\alpha - d)} \frac{1}{\beta^{\alpha - d}}$$

(on pourra raisonner par récurrence sur d).

c) En déduire qu'il existe $K(s) > 0$ tel que, pour tout $f \in H^s$,

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{l \in L_N} |\hat{f}(l)| \leq K(s) |f|_s\,.$$

Montrer qu'alors $S_N f$ converge vers f uniformément, et

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} |f(x)| \leq K(s)|f|_s.$$

d) Montrer que l'espace vectoriel normé H^s est complet.

3. a) Montrer que, si $f \in H^{s+1}$, alors f est de classe C^1 et, pour tout $j \in \{1,...,d\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in H^s$ avec l'inégalité

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_s \leq |f|_{s+1}.$$

b) Soit r un entier supérieur à $d/2$. Montrer que, si f est une fonction Λ-périodique de classe C^r, alors $f \in H^r$ et

$$|f|_r^2 \leq C(r) \left(|f|_0^2 + \sum_{j=1}^{d} \left\| \frac{\partial^r f}{\partial x_j^r} \right\|_0^2 \right)$$

où $C(r)$ ne dépend que de r et de d.

c) Déterminer l'intersection de tous les espaces H^s, $s > d/2$.

On définit sur l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^d$ une application linéaire Δ à valeurs dans les fonctions continues sur $\mathbf{R}^d$, par la formule

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

4. a) Montrer que, si $u \in H^{s+2}$, alors u est de classe C^2 , $u - \Delta u \in H^s$ et

$$|u|_{s+2} \leq (d+1)|u - \Delta u|_s \leq (d+1)|u|_{s+2}$$

(on pourra noter, pour $l \in L$, $|l| = (l_1^2 + ... + l_d^2)^{1/2}$).

b) Montrer que l'application $u \mapsto u - \Delta u$ est bijective de H^{s+2} sur H^s et de l'espace $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{C})$ sur lui-même.

5. Dans cette question et la suivante, on étudie le produit de deux éléments de H^s.

a) Soient $(c_l)_{l \in L}$ et $(d_l)_{l \in L}$ deux familles de nombres complexes, nuls sauf pour un ensemble fini d'indices l. Montrer l'inégalité

$$\sum_{l \in L} \left| \sum_{k \in L} c_{l-k} d_k \right|^2 \leq \left(\sum_{l \in L} |c_l| \right)^2 \sum_{k \in L} |d_k|^2$$

(appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit $\sqrt{|c_{l-k}|} \times \sqrt{|c_{l-k}|}|d_k|$).

b) Lorsque f et g sont des polynômes trigonométriques, calculer $\widehat{(fg)}(l)$ à l'aide des coefficients $\hat{f}(k)$ et $\hat{g}(k)$, $k \in L$.

c) Montrer qu'il existe une constante $C(s)$ telle que, pour tous polynômes trigonométriques f, g, l'inégalité suivante soit vraie :

(1) $$|fg|_s \leq C(s)|f|_s|g|_s$$

(on pourra écrire $\|fg\|_s^2$ comme une somme du type considéré en a), et majorer cette somme en distinguant les termes pour lesquels $[l-k] \leq [k]$ de ceux pour lesquels $[l-k] > [k]$).

d) Montrer que, si f et g sont des éléments de H^s, le produit fg appartient à H^s et qu'on a l'inégalité (1) ci–dessus.

6. Dans cette question, on se propose de raffiner l'inégalité (1).

a) Soit $m_0 > 0$. Montrer que, pour tout réel m, il existe un réel $D(m) \geq 0$ tel que, pour tous réels a, b vérifiant $0 \leq a \leq b$, on ait l'inégalité

$$(1+a+b)^m \leq 2^{m_0}(1+b)^m + D(m)(1+b)^{m-2}a^2$$

et qu'on peut choisir $D(m) = 0$ si $m \leq m_0$ (on pourra poser $a = t(1+b)$).

b) On fixe $s_0 > d/2$. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ et, pour tout $s \geq s_0$, un réel $B(s) \geq 0$ tels que, pour tous $f, g \in H^s$,

$$\|fg\|_s \leq A(\|f\|_{s_0}\|g\|_s + \|f\|_s\|g\|_{s_0}) + B(s)\|f\|_{s-1}\|g\|_{s-1} \tag{2}$$

et qu'on peut choisir $B(s) = 0$ si $s \leq s_0 + 2$.

PARTIE V. UN RÉSULTAT DE PERTURBATION.

Dans cette partie, on démontre le théorème de Nash après avoir construit une métrique G_0 de dimension d ayant les propriétés suivantes :

i) G_0 est représentable.

ii) Toute métrique suffisamment proche de G_0 est représentable.

Une application $F : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^∞ est dite *libre* si, pour tout point $y \in \mathbf{R}^p$, les $\dfrac{p(p+3)}{2}$ vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(y),\ 1 \leq \alpha \leq p,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(y),\ 1 \leq \alpha \leq \beta \leq p$$

sont indépendants dans $\mathbf{R}^q$.

1. Soit $F : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ une application libre, et soit $P : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^∞ dont la différentielle est injective en tout point de $\mathbf{R}^d$. Montrer que $F \circ P$ est libre.

En utilisant l'application

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R}^p &\to \mathbf{R}^{p(p+3)/2} \\ y &\mapsto (y_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq p,\ y_\alpha y_\beta,\ 1 \leq \alpha \leq \beta \leq p) \end{aligned}$$

construire un élément libre P_0 de $C^\infty_{\mathrm{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ pour un certain N.

Dans la suite de cette partie, on se donne une application P_0 comme à la question 1 ci–dessus.

Pour tout $s > d/2$, on note $(H^s)^N$ l'espace des applications P de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^N$ dont les composantes $(P_1, ..., P_N)$ appartiennent à H^s (*voir* **IV**.2). On munit cet espace de la norme

$$\|P\|_s = \sup_{1 \leq \alpha \leq N} \|P_\alpha\|_s .$$

Par ailleurs, l'opérateur Δ introduit au **IV**.4 se prolonge aux fonctions vectorielles de classe C^2 composante par composante, c'est-à-dire

$$\Delta(P_1, ..., P_N) = (\Delta P_1, ..., \Delta P_N).$$

Pour tout $s > (d/2) + 2$, on note $\mathcal{D}$ l'application linéaire de H^s dans H^{s-2} définie par $\mathcal{D}u = u - \Delta u$, et on désigne par $\mathcal{D}^{-1}$ son inverse (*voir* **IV**.4.b).

2. Soient $1 \leq i, j \leq d$. Pour tous $Q_1, Q_2 \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$, on pose

$$\mathcal{R}_{ij}(Q_1, Q_2) = \mathcal{D}\langle \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \frac{\partial Q_2}{\partial x_j} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle \frac{\partial Q_1}{\partial x_i}, \Delta Q_2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \Delta Q_1, \frac{\partial Q_2}{\partial x_j} \rangle .$$

Montrer que, pour tout $s > (d/2) + 2$, $\mathcal{R}_{ij}$ se prolonge en une application bilinéaire (notée encore $\mathcal{R}_{ij}$) de $(H^s)^N \times (H^s)^N$ dans H^{s-2} telle qu'il existe $C_1(s) > 0$ vérifiant

$$\forall Q_1 \in (H^s)^N,\ \forall Q_2 \in (H^s)^N,\ \ \|\mathcal{R}_{ij}(Q_1, Q_2)\|_{s-2} \leq C_1(s)\|Q_1\|_s \|Q_2\|_s.$$

3. Soit $H \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$. On considère le système

$$(S) \qquad \begin{cases} \langle \dfrac{\partial P_0}{\partial x_i}, Q \rangle = \mathcal{D}^{-1}\langle \dfrac{\partial Q}{\partial x_i}, \Delta Q \rangle,\ 1 \leq i \leq d, \\ \langle \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}, Q \rangle = -\dfrac{H_{ij}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{R}_{ij}(Q, Q),\ 1 \leq i \leq j \leq d. \end{cases}$$

Montrer que toute solution $Q \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ de (S) vérifie $\Gamma(P_0 + Q) = \Gamma(P_0) + H$.

4. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on note $V(x)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^N$ engendré par

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_i}(x),\ 1 \leq i \leq d;\ \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ 1 \leq i \leq j \leq d.$$

Montrer que le système formé de (S) et de la condition

$$(P) \qquad \forall x \in \mathbf{R}^d,\ Q(x) \in V(x)$$

est équivalent à une équation du type

$$Q = \tilde{H} + \mathcal{B}(Q, Q)$$

où $\tilde{H}$ est donnée dans $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ et où, pour tout $s > (d/2) + 2$,

$$\mathcal{B} : (H^s)^N \times (H^s)^N \longrightarrow (H^s)^N$$

est une application bilinéaire telle qu'il existe $C_2(s) > 0$ vérifiant

$$\forall Q_1 \in (H^s)^N,\ \forall Q_2 \in (H^s)^N,\ \ \|\mathcal{B}(Q_1, Q_2)\|_s \leq C_2(s)\|Q_1\|_s \|Q_2\|_s.$$

5. Soit s_0 un réel supérieur à $d/2$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout élément H de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ vérifiant

$$\sup_{1\leq i,j\leq d} |H_{ij}|_{s_0+2} \leq \varepsilon_0 ,$$

l'équation

$$\Gamma(P) = \Gamma(P_0) + H$$

admette une solution $P \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^N)$ (on pourra poser, pour tout entier naturel k et pour tout $Q \in (H^{s_0+2+k})^N$, $N_k(Q) = |Q|_{s_0+2+k}$).

6. Soit $G_0 = \Gamma(P_0)$ et soit G une métrique quelconque de dimension d.
Montrer qu'il existe $t > 0$ et $H \in C^\infty_{\text{per}}(\mathbf{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbf{R}))$ tels que $G - tG_0 - H$ soit représentable en dimension N' pour un certain N', et que $tG_0 + H$ soit représentable en dimension N.
En déduire que G est représentable en dimension $N + N'$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail